Chambre de Commerce et d'Industrie d'Amiens

CONCOURS ESIEE-AMIENS

MATHEMATIQUES

Durée : 3 h.

PROBLEME I : ANALYSE

Le problème est consacré à quelques expressions intégrales de la constante γ d'Euler, définie en 1.2.

1- Soit (u_k) la suite réelle définie pour tout entier $k \geq 1$ par : $u_k = \frac{1}{k} - \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt$

On pose pour tout entier $n \geq 1$: $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$.

1.1- Etablir que : $(\forall k \geq 1) \quad 0 \leq u_k \leq \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$

1.2- En déduire que la suite $(S_n)_{n \in N^*}$ converge vers une limite $\gamma \in [0;1]$.

2- Soit n un entier vérifiant $n \geq 1$.

2.1- Soit u un réel de l'intervalle $[0;1]$. Exprimer la somme $1 + (1-u) + (1-u)^2 + ... + (1-u)^{n-1}$.

2.2- En déduire que : $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} = \int_0^1 \frac{1-(1-u)^n}{u} du$

2.3- Pour tout réel $t \in [0;n]$, on définit : $e_n(t) = \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n$

Déduire du 2.2 que : $S_n + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \int_0^1 \frac{1-e_n(t)}{t} dt - \int_1^n \frac{e_{n(t)}}{t} dt$

3.1- Etablir que pour tout réel u : $1+u \le e^u$

3.2- En appliquant le résultat du 3.1 à $u=\frac{t}{n}$ et à $u=-\frac{t}{n}$, montrer que :

$$(\forall n \in N^*)(\forall t \in [0;n]) \qquad \left(1-\frac{t^2}{n^2}\right)^n e^{-t} \le e_n(t) \le e^{-t}$$

En déduire alors que : $0 \le e^{-t} - e_n(t) \le \frac{t^2}{n} e^{-t}$

(on pourra appliquer le théorème des accroissements finis à la fonction $x \mapsto \left(1-x\frac{t^2}{n^2}\right)^n$ sur l'intervalle $[0;1]$)

4.1- Etablir la convergence des intégrales $I=\int_0^1 \frac{1-e^{-t}}{t}dt$ et $J=\int_1^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}dt$.

4.2- Pour tout entier $n \ge 1$, justifier l'existence de l'intégrale $K_n=\int_0^n \frac{e^{-t}-e_n(t)}{t}dt$

et montrer que $\lim_{n\to+\infty} K_n = 0$.

4.3- En déduire finalement que : $\gamma = I - J$.

5- On note Γ la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $\Gamma(x)=\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt$.

5.1- Etablir pour tout $x>0$, que l'intégrale $\Gamma(x)$ est convergente.

5.2- Pour tout entier $n \ge 1$, on note Γ_n la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $\Gamma_n(x)=\int_{1/n}^n e^{-t}t^{x-1}dt$

Justifier que Γ_n est de classe C^1 sur $]0;+\infty[$.

5.3- Montrer que la suite $(\Gamma_n)_{n\ge1}$ converge uniformément vers Γ sur tout intervalle fermé $[a;b]$ $(a<b)$ contenu dans $]0;+\infty[$.

5.4- Pour tout réel $x>0$, on pose : $F(x)=\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}\ln t.dt$

Etablir la convergence de l'intégrale $F(x)$.

Prouver que Γ est de classe C^1 sur $]0;+\infty[$ et que $\Gamma' = F$.

5.5- En conclure, à l'aide du 4.3, que $\Gamma'(1) = -\gamma$

PROBLEME II : ALGEBRE ET GEOMETRIE

On se place dans un espace vectoriel réel E de dimension 3 muni de son produit scalaire canonique noté $x \bullet y$. On rappelle que : $(\forall x \in E)\ \|x\|^2 = x \bullet x$.
Si F est un sous-espace vectoriel de E, on note $F^{\perp}$ le sous-espace vectoriel orthogonal à F.
Soit $u \in E\ (u \neq 0)$: le sous-espace vectoriel de E engendré par u sera noté $\langle u \rangle$.
Si φ est un automorphisme orthogonal de E, c'est à dire un endomorphisme bijectif de E vérifiant : $(\forall (x,y) \in E^2)\ \varphi(x) \bullet \varphi(y) = x \bullet y$, on pose :

$$P_\varphi = \{x \in E \,/\, \varphi(x) = x\}$$
$$R_\varphi = \{x \in E \,/\, (\exists y \in E)\ x = \varphi(y) - y\}$$

N.B. : les parties I et II de ce problème sont totalement indépendantes.

Partie I :

Si u est un vecteur non nul fixé de E, on note s_u l'application de E dans E définie par :

$$(\forall x \in E) \quad s_u(x) = x - 2\left(\frac{x \bullet u}{\|u\|^2}\right)u$$

1.1- Vérifier que s_u est un endomorphisme de E et que $s_u(u) = -u$.

1.2- Montrer que : $s_u \circ s_u = Id_E$

1.3- En déduire que s_u est un automorphisme orthogonal de E.

2- Soit h un endomorphisme de E vérifiant : $(\forall u \in E)\ (u \neq 0) \Rightarrow (h \circ s_u = s_u \circ h)$

Montrer que h est une homothétie de E.

3- Soient v et w deux vecteurs distincts dans E tels que $\|v\| = \|w\|$. Etablir que : $s_{v-w}(v) = w$

4.1- Justifier que P_{s_u} est un sous-espace vectoriel de E de dimension 2.

4.2- Soit (e_1, e_2) une base de P_{s_u}. Montrer que (e_1, e_2, u) est une base de E et donner la matrice de s_u dans cette base.

5- Montrer que $R_{s_u} = \langle u \rangle$.

Partie II

Soit φ un automorphisme orthogonal de E. Dans certte partie, on note :

φ^{-1} l'automorphisme réciproque de φ

φ^k l'application de E dans lui - même définie par : $\varphi^k = \underbrace{\varphi \circ \varphi \circ \ldots \circ \varphi}_{k\,fois}$ si k est un entier tel que $k \geq 1$

et on pose $\varphi^0 = Id_E$.

1- Vérifier que P_φ et R_φ sont des sous-espaces vectoriels de E.

2.1- Etablir que : $(\forall (x,y) \in E^2)\ x \bullet (\varphi(y) - y) = (\varphi^{-1}(x) - x) \bullet y$

2.2- En déduire que : $P_\varphi = (R_\varphi)^\perp$

3- Soit n un entier naturel non nul. On définit l'application Φ_n de E dans lui-même par :

$$\Phi_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \varphi^k = \frac{1}{n}\left(Id_E + \varphi + \ldots + \varphi^{n-1}\right)$$

3.1- Vérifirer que Φ_n est un endomorphisme de E.

3.2- *(i)* Soit $x \in R_\varphi$. Montrer qu'il existe $y \in E$, tel que : $(\forall k \in \{0,1,\ldots,n-1\})\ \varphi^k(x) = \varphi^{k+1}(y) - \varphi^k(y)$

(ii) En déduire que pour tout $x \in R_\varphi$, il existe y $\in E$ tel que : $\|\Phi_n(x)\| \leq \frac{2\|y\|}{n}$

3.3- Soit w un vecteur de E.

(i) Montrer qu'il existe un unique couple $(x, p(w)) \in R_\varphi \times P_\varphi$ tel que : $w = x + p(w)$

(ii) En déduire finalement que la suite $(\Phi_n(w))_{n \in N^*}$ converge dans E vers $p(w)$.